Universidade Federal
de São João del-Rei

Letícia Belo Bergo

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA: JOGOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE

São João del-Rei/MG
Agosto de 2018

Letícia Belo Bergo

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA: JOGOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Santos de Oliveira

São João del-Rei, 03 de agosto de 2018

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Dr. Marcos Santos de Oliveira

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

Profa. Dra. Romélia Mara Alves Souto

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por todas as conquistas, por toda força e por me trazer para perto d'Ele no decorrer dessa jornada, pela oportunidade de buscar aquilo que acredito. Agradeço aos meus pais, Edson e Maria das Graças, minha irmã Thaís, e minha filha Lavínia, pelo apoio, pela torcida, pelo incentivo, por saltarem comigo todos os obstáculos com os quais me deparei durante esse tempo. Sou grata pelos amigos que descobri nessa caminhada, que são minha família na Universidade, sem os quais tudo teria sido muito difícil. Ao meu orientador, o professor Marcos, pela excelente orientação, por acolher minha proposta com coragem e sabedoria, e por toda a sua dedicação. A minha professora Viviane, que me acompanhou desde o início em disciplinas e projetos, na qual me espelho, e com quem constituí uma relação maior do que a de professor/aluno, uma relação de amizade. Ao Romário, por todo apoio e carinho, por toda ajuda, especialmente nessa fase final, e por tudo que me ensinou quando juntou seus passos aos meus. A toda a equipe pedagógica da Companhia Educacional Enlace, pela receptividade, e aos professores envolvidos que permitiram e incentivaram a minha intervenção com seus alunos. Aos professores Romélia e Francinildo que gentilmente aceitaram fazer parte da banca examinadora.

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso visa o estudo e a apresentação de metodologias para o ensino de Probabilidade através de jogos criados com este propósito, e a proposta de um novo jogo. Será apresentado um estudo sobre Probabilidade e a teorização de cada jogo estudado. Além disso, duas aplicações práticas serão relatadas e seus resultados, discutidos. Uma delas em uma turma de quinto ano do Ensino Fundamental I, com o propósito de discutir a orientação da BNCC acerca da introdução de noções de Estatística ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e outra em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental II.

Palavras-chave: Educação Estatística. Probabilidade. Jogos.

Sumário

1 Introdução

O ensino de Estatística em qualquer dos níveis de ensino vem, há tempos, apresentando problemas e sendo responsável por muitas das dificuldades enfrentadas pelos alunos em suas atividades curriculares. Em meados da década de 1990, começaram a se intensificar as investigações relacionando o ensino e a aprendizagem de Estatística e dando início a uma nova área de atuação pedagógica denominada Educação Estatística (EE).

O estudo dos tópicos de Probabilidade e Estatística prende-se à discussão da unidade temática Estatística que compõe parte dos eixos norteadores "Tratamento da informação" e "Análise de dados" dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (PCN, 1998, 2000). Este documento enfatiza que os conteúdos devem ser abordados de forma que desenvolvam ideias e técnicas que permitam aplicar a Matemática a questões do mundo real.

Segundo Zabala (1998), os professores devem evitar a tradição e procurar fazer o possível para melhorar a sua prática, levando em consideração os materiais usados em suas aulas, tal qual a forma de sua preparação, dentre outros. Esses aspectos contribuem para a formação do aluno. Cabe também ao professor atuar como elemento facilitador de todo o processo de aprendizagem, pontuando e classificando as atividades mais adequadas para este processo, para que assim permita haver a aquisição de conhecimentos e desenvolvimento de habilidades (CUNHA; CICILLINI, 1995).

Ainda nessa diretriz, temos o fato de que materiais lúdicos oferecem uma gama de possibilidades para o ensino de Matemática. Recentemente, alguns pesquisadores da Universidade de São Paulo desenvolveram, dentro do projeto "Aventuras na Ciência", materiais lúdicos nas áreas de Astronomia, Química, Biologia, Física e Matemática. O kit específico de Matemática (COLLI, 2013) denominado "As Certezas do Acaso" trata de experimentos que podem ser utilizados para o ensino de Probabilidade. Seu conteúdo é ilustrado através de lançamentos de dados de diferentes formas (6 faces, 8 faces, etc.), sorteios e situações. É uma ferramenta que pode auxiliar na construção do conhecimento do aluno, possibilitando que este o construa por meio dos experimentos, sem a necessidade da imediata aceitação do que está descrito no livro didático. Esse material será ponto de partida para a investigação e catalogação dos conteúdos que norteiam esse trabalho, além da proposta de um novo experimento e a aplicação prática em sala de aula.

2 Justificativa

O ensino de Probabilidade e Estatística que é oferecido aos alunos deve possibilitar a construção de conhecimentos necessários para a compreensão da sociedade atual.

> A estatística, com os seus conceitos e métodos, configura-se com um duplo papel: permite compreender muitas das características da complexa sociedade atual, ao mesmo tempo em que facilita a tomada de decisões em um cotidiano onde a variabilidade e a incerteza estão sempre presentes (LOPES, 2010, p. 51).

Os conteúdos de Probabilidade e Estatística que devem ser trabalhados na Educação Básica permitem que o professor aborde tópicos em torno de incertezas e aleatoriedades, o que pode influenciar na tomada de decisões do indivíduo e, consequentemente, refletir em sua vida econômica e social. Ainda nesse contexto, podemos citar Colli (2013), que diz:

> A teoria das probabilidades sofreu, no início, com sua associação com jogos e apostas. Era uma motivação pouco nobre e contradizia as superstições dos jogadores. Hoje em dia é impossível pensar na ciência sem ela. Embora lide com o acaso, é base da solidez financeiras das companhias de seguros (COLLI, 2013).

A partir dos pontos de vista destacados e considerando a vivência prática do ensino de Probabilidade e Estatística, é possível constatar que há uma escassez de materiais que permitam uma aprendizagem lúdica e, consequentemente, uma visualização prática dessa teoria. Nesse sentido, professores tendem a suprimir ou até mesmo ocultar os conteúdos de Probabilidade, fazendo com que muitos alunos concluam o Ensino Médio sem ter a base mínima desses conteúdos. Acerca de tal situação, é importante que haja materiais que possam ser disponibilizados aos professores, que apresente e direcione uma prática diferenciada, que ofereça ao aluno e ao próprio professor uma nova percepção do conteúdo.

3 Objetivos

3.1 Gerais

- Apresentação dos materiais lúdicos para o ensino de Probabilidade por intermédio do kit da USP: "Aventuras na Ciência - Certezas do Acaso" e análise dos experimentos disponíveis no kit com relação à praticidade e à funcionalidade dos mesmos;
- Sugestão de um novo experimento, externo ao kit;
- Aplicação prática em sala de aula.

3.2 Específicos

- Revisar publicações que tratem do ensino-aprendizagem de Estatística;
- Analisar o kit da USP: "Aventuras na Ciência - Certezas do Acaso" e os onze experimentos nele contido, bem como a descrição e a explicação das atividades selecionadas;
- Identificar quais desses experimentos apresentam uma teorização adequada e uma atividade prática propícia de ser aplicada;
- Propor um experimento que não está alocado ao kit;
- Aplicar três experimentos selecionados em sala de aula discutir acerca dessa aplicação;
- Auxiliar colegas professores com o ensino deste conteúdo.

4 Desenvolvimento

Nessa seção, vamos apresentar um breve histórico sobre Probabilidade juntamente com algumas definições e uma perspectiva acerca do ensino de Probabilidade e da utilização de jogos. Abordaremos também um estudo e teorização dos experimentos selecionados, além da descrição de duas aulas em que foram aplicados três dos experimentos estudados.

4.1 Breve histórico da Probabilidade

As raízes da Probabilidade apareceram principalmente na prática de jogos e apostas. Por volta do ano 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar era usado formando faces, como um dado mas, mesmo antes disso, por volta de 3500 A.C. já havia jogos utilizando ossinhos, no Egito. Os Romanos também desenvolviam certo interesse por jogos de dados e cartas, que acabaram sendo proibidos pela Igreja Cristã, na Idade Média.

Jerónimo Cardano é considerado o iniciador da teoria das Probabilidades. Publicou *"Liber de Lugo Aleae"* (O livro dos jogos de azar) em 1526, no qual descreveu os resultados da pesquisa sobre Probabilidades de ganhar em vários jogos de azar.

Cardano foi o primeiro a fazer considerações do conceito de Probabilidade de um dado honesto[1] e a escrever um argumento teórico para calcular Probabilidade.

De todo modo, ainda há muitos autores que atribuem a origem dessa teoria às correspondências que Pascal e Fermat trocavam, nas quais falavam sobre o objetivo de se obter soluções para os jogos de azar.

O desenvolvimento da Probabilidade teve grande impulso em 1657 com a publicação do primeiro tratado formal sobre Probabilidade, que foi escrito por Christiaan Huygens. O conceito de esperança matemática foi tratado nesse estudo. Um trabalho de Jakob Bernoulli (1654 - 1705) publicado em 1713 foi o primeiro livro totalmente dedicado à teoria das Probabilidades. Parte desse livro dedica-se à uma reedição do trabalho de Huygens sobre jogos de azar, e outra parte direciona-se à permutações e combinações, chegando até o teorema de Bernoulli sobre distribuições binomiais.

Além da Probabilidade ser fundamentada nos jogos, é importante ressaltar que os maiores problemas estatísticos que utilizam a teoria das Probabilidades surgem no processo de amostras.Um dos primeiros registros de levantamento estatístico foi feito na Inglaterra. Nele, constavam informações sobre proprietários de terras, uso da terra, seus empregados e animais, e recebeu o nome de *"Doomsday Book"* e era utilizado como base para o cálculo de impostos.

O ensino da Estatística iniciou-se na Alemanha em 1660, e o objetivo da disciplina era descrever o sistema de organização do Estado. Tempos depois, em 1777, o ensino da Estatística foi implementado também nas universidades da Áustria, depois nas universidades

[1] O conceito de dado honesto refere-se ao dado não viciado, no qual todas as faces tem a mesma chance de sair.

italianas. Em 1845 chegou às universidades dos EUA, e em 1849 passou a integrar as universidades da Bélgica. No Reino Unido, em 1875. A metodologia atual é uma criação característica do século XX, mas com raízes nos desenvolvimentos mais antigos.

4.2 Probabilidade

Podemos dizer que **Probabilidade** é uma medida que quantifica a sua incerteza frente a um possível acontecimento futuro.

4.2.1 Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Eventos

Para a realização dos cálculos de Probabilidade, primeiro devemos descrever qual é o conjunto de possíveis resultados de um **Experimento Aleatório** (que é qualquer fenômeno que gere um resultado incerto ou casual) e calcular qual é o número de elementos contidos nele. Esse conjunto é chamado de **Espaço Amostral**, denotado por Ω. O número de elementos de um conjunto é denotado por $\#$, assim, $\#\,\Omega$ representa o número de elementos do Espaço Amostral. Por exemplo, consideremos o seguinte experimento aleatório: jogar um dado e observar a face de cima. Nesse caso, o Espaço Amostral é o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\#\,\Omega = 6$ é a quantidade de elementos de Ω.

Os subconjuntos do Espaço Amostral são chamados de **Eventos**. Por exemplo, o subconjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é o Evento que acontece se o número mostrado na face de cima for menor que 4.

4.2.2 Definição dos métodos Clássico e Frequentista

Dentre os métodos utilizados para se medir essa incerteza, trataremos aqui do método *Clássico* e do método *Frequentista.*

Definição 4.2.1 (Método **Clássico**). *Se A é o evento de interesse, a probabilidade de A, representada por $P(A)$ é dada por:*

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favoráveis do evento } A}{\textit{número de casos possíveis}}.$$

Vejamos um exemplo. Vamos calcular a probabilidade do Evento A, citado acima. Consideremos o Evento $A = \{1, 2, 3\}$ e $\#\,A = 3$ e o Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\,\Omega = 6$.

Assim, pela definição de probabilidade Clássica, temos:

$$P(A) = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Definição 4.2.2 (Método **Frequentista**). *Se A é o evento de interesse, a probabilidade de A, representada por $P(A)$ é dada por:*

$$P(A) = \frac{\textit{número de vezes em que } A \textit{ ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

Em que o número de repetições deve ser grande.

O valor obtido, nesse caso, é uma estimativa da Probabilidade e a qualidade dessa estimativa depende do número de repetições do experimento.

4.2.3 Espaço de Probabilidade

Segundo Morgado et al. (1991), a obra *Liber de Ludo Aleal* de Cardano traz a primeira definição formal de Probabilidade como quociente do número de "casos favoráveis" sobre o número de "casos possíveis".

Definição 4.2.3. *Seja Ω um Espaço Amostral (um conjunto). Uma função P definida para os subconjuntos de Ω (chamados Eventos) é chamada uma Probabilidade se:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *para todo evento* $A \subset \Omega$ *;*

2. $P(\emptyset) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$ *;*

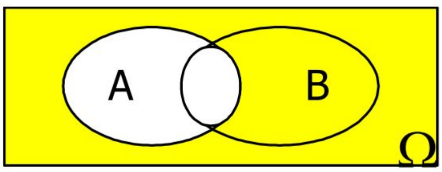
3. *Se A e B são eventos disjuntos (também chamados de mutuamente exclusivos), então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

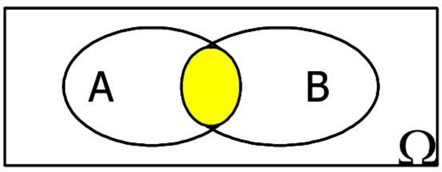
4.2.4 Operações com Eventos

Introduzido em 1880 por Jhon Venn, um matemático britânico, o diagrama de Venn nos permite ilustrar três operações básicas com eventos: intersecção, união e complementar, da seguinte forma: Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω.

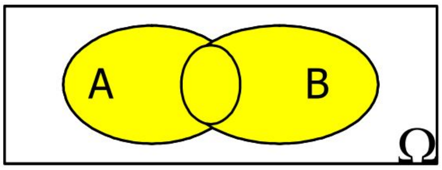
- $P(A^c) = 1 - P(A)$;



- $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = P(B) \times P(A|B)$, sendo $P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo da ocorrência do evento A (Probabilidade condicional);



- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



4.3 O Ensino de Probabilidade

As orientações quanto ao ensino de Estatística na Educação Básica são postas de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, no qual foram introduzidos como um dos eixos de ensino de Matemática na Educação Básica, um bloco de conteúdos intitulado Tratamento da Informação (no Ensino Fundamental) e Análise de Dados (no Ensino Médio), que buscam abordar conceitos de Estatística e Probabilidade e, assim, discussões direcionadas acerca de questões que são relativas aos conteúdos que devem ser abordados nesses diferentes níveis de ensino e a forma de abordagem dos mesmos, que merecem ênfase entre os educadores matemáticos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2016), é uma proposta que começou a ser formulada no primeiro semestre de 2015 e foi homologada em 20 de dezembro de 2017, com proposta de rever os currículos em 2019 até o prazo máximo do ano letivo de 2020. Tal proposta sugere a capacitação de professores e a adequação de material didático acerca de suas orientações. Esse documento sugere a introdução de noções de Estatística e Probabilidade ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O ensino de Probabilidade deve proporcionar e despertar o interesse dos alunos e, com isto, contribuir para o desenvolvimento da compreensão do seu cotidiano quando este apresenta aspectos ou conceitos de Probabilidade. Batanero (2006) destaca a importância do ensino de probabilidade com a finalidade de educar o raciocínio probabilístico que é necessário ao enfrentar o acaso na vida cotidiana e melhorar as intuições dos alunos. Este ensino deve ultrapassar o contexto escolar, haja vista sua importância social e, para isto, é necessário que a prática pedagógica ultrapasse a simples linha de definições e reprodução de procedimentos metodológicos. A ação do professor deve ser um elemento crucial no processo de ensino aprendizagem, promovendo encaminhamentos metodológicos que favorecem o entendimento dos alunos com relação aos elementos e procedimentos sobre Probabilidade. Para isso, é importante que o professor aborde esse tema por meio de atividades em que os alunos possam realizar experimentos e observar os eventos, promovendo a manifestação intuitiva do acaso e da incerteza, construindo, a partir desses resultados, métodos matemáticos para o estudo de tais fenômenos.

Muitas vezes, o trabalho com Estatística e Probabilidade é deixado para ser tratado com os alunos ao final do ano letivo no intuito de preencher um tempo vago, caso houvesse na situação pedagógica em questão ou até mesmo para ser substituído com outros temas do currículo, que necessitem de mais tempo para ser trabalhado. Lopes (2010) sugere a existência de uma ausência dessa temática dos professores para trabalhar este conteúdo com os alunos, e discorre que há uma "falta de domínio teórico-metodológico do professor sobre os conceitos estatísticos e probabilísticos".

4.4 A utilização de jogos no ensino

Lopes (1998) declara que é preciso desenvolver uma prática pedagógica e que sejam propostas situações em que os alunos realizem atividades, observem e construam os eventos possíveis, através de experimentação concreta.

O fio condutor da relação entre o conteúdo matemático e o aprendizado é a estruturação de um trabalho pedagógico didático no meio escolar. Por esse motivo, acredita-se que a utilização de recursos metodológicos para o ensino, entre eles, os jogos, auxiliam na prática educativa.

Um jogo ou uma atividade lúdica exploratória propicia um ambiente escolar que é favorável ao interesse do aluno, não só pelo fato de ser "um jogo" mas também pelo desafio das regras e estratégias, que contribuem significativamente para a construção do conhecimento do aluno. Atividades desse caráter podem ser utilizadas para introduzir um conceito novo, para fixá-lo ou até mesmo para concluí-lo. Não importa em que fase ela é aplicada, mas sim, de que forma. É determinante que essa atividade traga indagações e reflexões que ofereçam ao educador, circunstâncias para o progresso do desenvolvimento cognitivo.

4.5 Projeto Aventuras na Ciência

O projeto Aventuras na Ciência[1] foi desenvolvido por uma equipe de cientistas da Universidade de São Paulo - USP, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ e Universidade de Campinas - UNICAMP com o intuito de resgatar a curiosidade dos jovens, o seu interesse pela compreensão da natureza e do mundo em que vivemos, propiciando-os uma iniciação na grande aventura da ciência. Foram criados kits para Astronomia, Biologia, Física, Matemática e Química. Cada um deles vem acompanhado de um folheto descritivo, explicando os resultados que se pode obter, e uma breve história dos cientistas que contribuíram para a evolução de tal conteúdo. Também conta com um manual de instruções para cada experimento que é proposto e questionamentos sobre os resultados.

O objetivo do projeto é a contribuição para um avanço na qualidade no ensino de ciências, o que é essencial para o desenvolvimento dos alunos. Existem em nosso país, ainda muitas escolas onde os jovens não têm acesso a laboratórios para que possam manipular objetos reais de seu estudo e aplicar os conhecimentos que foram adquiridos em aula.

[1] Disponível em <http//www.aventurasnaciencia.ib.usp.br>.

4.6 Kit "As Certezas do Acaso"

Esse kit foi projetado também na tentativa de suprir equipamentos de laboratório e materiais experimentais, caso estes não estejam presentes nas escolas. O objetivo geral deste kit é contribuir para que o estudante consiga criar uma visualização melhor e mais concreta acerca da Probabilidade. Cada experimento precisa ser testado com um grande número de jogadas pois, assim torna-se mais simples a percepção do quanto a Probabilidade é capaz de modelar alguns fenômenos a nossa volta.

O kit contém:

Tabela 1: Materiais disponíveis no kit.

Material	Quantidade
Dados comuns pequenos	10
Dados comuns maiores	1
Dado em forma de octaedro	1
Dado em forma de dodecaedro	1
Dado em forma de icosaedro	1
Dados de 10 faces	2
Dado em forma de coboctaedro	1
Dados em forma de octaedro marcando os oito pontos cardeais	2
Tabuleiro de papelão quadriculado	1
Folhas de papel milimetrado	2
Dados em forma de cubo com marcações	3
Dispositivo do "amigo secreto"	1
Chocalhos	3

Os experimentos do projeto contemplam o conteúdo de Probabilidade e seus criadores sugerem sua utilização para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio e o kit é composto por 11 experimentos intitulados:

Tabela 2: Nome dos onze experimentos que são apresentados no kit.

1. Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto?
2. Dá para viciar o lançamento de um dado honesto?
3. Probabilidades para um dado em forma de cuboctaedro
4. O lançamento de dois dados: qual é o modelo correto?
5. Probabilidades numa rodada de 10 jogadas de cara e coroa honesto e desonesto
6. O passeio (bidimensional) do bêbado
7. Qual é a chance de dois números naturais não terem fator comum?
8. Qual é a chance de dois colegas de turma fazerem aniversário no mesmo dia?
9. Dados não transitivos
10. As probabilidades por trás de um sorteio de amigo secreto
11. O que há dentro dos chocalhos?

4.7 Experimentos Estudados

Dos onze experimentos que o kit apresenta, analisaremos nesse trabalho os seis que julgamos mais interessantes para aplicação nos Ensinos Fundamental (anos iniciais e finais) e Médio. Além de apresentar as instruções para cada um desses experimentos, faremos uma teorização para cada um, visando facilitar a compreensão dos professores. Propusemos também um experimento envolvendo a análise acerca da honestidade/desonestidade do jogo "Par ou Ímpar".

4.7.1 Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto?

1. Material: 10 dados comuns e papel quadriculado.

2. Instruções para os lançamentos: Faremos 1.000 lançamentos. Para isso, podemos utilizar os dez dados idênticos e não viciados e lançá-los, todos de uma vez considerando que jogamos apenas um dado dez vezes. Assim facilita, pois teremos que realizar 100 lançamentos ao invés de 1.000. Anotaremos todos os resultados em uma tabela e faremos um gráfico.

3. Instruções para a construção da tabela: A tabela deve ter quatro colunas e cem linhas, onde cada linha corresponderá a uma rodada do lançamento dos dez dados, por exemplo:

Tabela 3: Exemplo das rodadas dos lançamentos dos dados.

Rodada	Faces 1	Total (Frequência acumulada)	Fração (Proporção)
1 - 10	2	2	0,2000
11 - 20	1	3	0,1500
21 - 30	3	6	0,2000
31 - 40	1	7	0,1750
41 - 50	0	7	0,1400
51 - 60	1	8	0,1333
61 - 70	2	10	0,1429
71 - 80	3	13	0,1625
81 - 90	0	13	0,1444
91 - 100	2	15	0,1500

A tabela 3 nos indica que a face 1 ocorreu duas vezes na primeira rodada, uma na segunda, três na terceira, uma na quarta, nenhuma na quinta, uma na sexta e duas na sétima. A terceira coluna indica o valor acumulado, por exemplo, até a sétima rodada, a face 1 ocorreu dez vezes. E os valores da quarta coluna são obtidos dividindo-se o número da terceira coluna pelo número total de dados jogados: $\frac{2}{10} = 0,2$ na primeira rodada, $\frac{3}{20} = 0,15$ na segunda, e assim por diante. Podemos arredondar essas frações na quarta casa decimal. Seria vantajoso permitir que os alunos utilizem a calculadora nessa parte.

4. Instruções para a construção do gráfico: Ao final das 100 rodadas, teremos um experimento real realizado com 1000 dados, do qual faremos um gráfico dos valores da quarta coluna em função da primeira. Usaremos um papel quadriculado. Construiremos primeiro, o eixo das abcissas, no qual serão representadas as rodadas. Calculamos e planejamos a escala bem para que o tamanho do papel seja suficiente. O eixo das ordenadas será representado o valor final (da quarta coluna da tabela). Aconselhamos utilizar valores entre 0,1 e 0,2 apenas e, caso algum número esteja fora desse intervalo, simplesmente não colocaremos o ponto no gráfico. Utilizando o nosso exemplo:

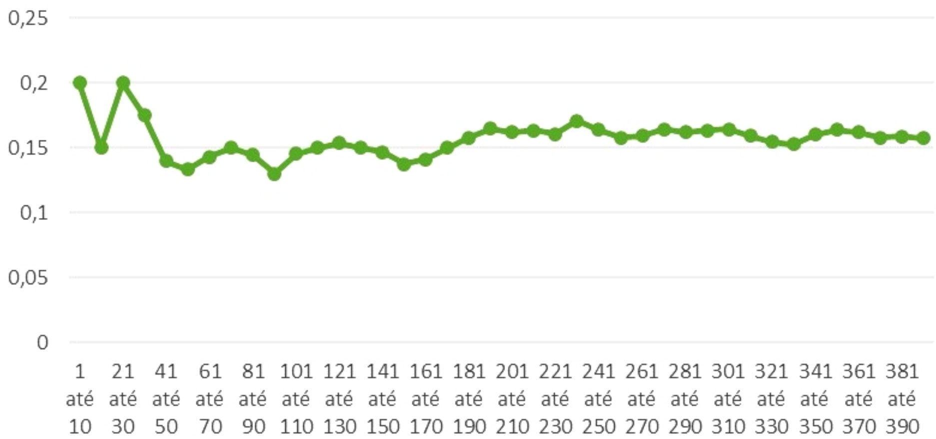


Figura 1: Probabilidade de tirar a face 1 em 390 jogadas.

5. Resultados: Agora é hora de refletir sobre os resultados. Sabemos que a probabilidade de sair a face 1 é de $\dfrac{1}{6} = 0,16666\ldots$, assim, quanto mais jogadas fizermos, mais o gráfico se aproxima desse valor.

6. Complementando: O kit também possui outros dados em forma de outros poliedros. Um octaedro (8 faces triangulares), um dodecaedro (12 faces pentagonais), um icosaedro (20 faces triangulares) e um decaedro (10 faces indistinguíveis entre si e numeradas de 0 a 9 para que seja possível sortear um dígito).

Teorização do Experimento

- Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Evento de interesse $A = \{1\}$.

1. Pela definição clássica, temos:

$$P(A) = \frac{\#\, A}{\#\, \Omega} = \frac{1}{6}.$$

2. Pela definição frequentista, temos:

$$P(A) = \frac{\textit{número de vezes em que } A \textit{ ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

4.7.2 É possível viciar o lançamento de um dado honesto?

1. Materiais: Um dado simples (maior) e um suporte que nós mesmo conseguimos criar para que o dado seja sempre lançado de uma mesma altura e uma mesma posição.

2. Objetivo: Fazermos uma experiência com dados comuns, buscando fazer com que o lançamento seja sempre igual. É evidente que não será sempre igual, e isso se deve às limitações experimentais. Também não podemos fazer um lançamento muito próximo à superfície da mesa, de modo que o dado seja colocado ali sempre com a mesma face voltada para cima.

3. Instruções para os lançamentos: A cada lançamento, devemos colocar o dado em um suporte que tenha uma altura fixa em relação à mesa e sempre na mesma posição (não apenas uma face, mas todas as faces na mesma posição). Empurraremos o dado suavemente, de forma que ele caia apenas pela ação da gravidade. Realizemos N lançamentos (o máximo possível).

4. Instruções para as anotações: Anotemos o resultado de cada lançamento, ou seja, a face que saiu voltada para cima. Por exemplo: $3,\ 4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1,\ 4,\ 4, \ldots$

5. Instruções sobre a análise das anotações: Contemos quantas vezes saiu cada uma das faces, e divida cada um desses números por N.

6. Resultados: As faces parecem ter igual probabilidade ou esses lançamentos parecem ser tendenciosos para alguma das faces?

Teorização do Experimento

- Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Evento de interesse pode ser, por exemplo: $A = \{4\}$.

1. Pela definição clássica, temos:

$$P(A) = \frac{\#\, A}{\#\, \Omega} = \frac{1}{6}.$$

Essa é a probabilidade real do lançamento do dado honesto, porém, a proposta desse experimento é viciar um dado honesto. Após a realização do experimento, podemos calcular:

2. Pela definição frequentista, temos:

$$P(A) = \frac{\textit{número de vezes em que A ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

4.7.3 Probabilidades numa rodada de 10 jogadas de Cara e Coroa honesto e desonesto.

1. Material: 10 dados comuns.

2. Objetivo: Simularmos um grupo de 10 jogadas de cara coroa e observar a frequência em que ocorrem apenas 10 caras, ou 9 caras e 1 coroa, ou 8 caras e 2 coroas e etc. Usando os dados em vez de moedas, conseguimos simular jogos honestos e desonestos de cara e coroa.

3. Instruções para os lançamentos: A proposta é realizarmos muitas rodadas de 10 jogadas de cara e coroa (que tal 1.000?) e, em cada rodada, anotar quantas vezes sair cara. Mas, nesse experimento, faremos utilizando dados, e, então, anotamos os números que saíram em cada rodada. Devido a análise que será feita depois, é aconselhável que anotemos os números em ordem com suas repetições, por exemplo: 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6 significa que saíram dois dados com o número 1, nenhum com o número 2, dois com o número 3, dois com o número 4, um com o número 5 e três com o número 6. Vejamos:

Tabela 4: Rodadas e exemplos de saídas de cada valor do dado.

Rodadas	Saídas
1	1,1,3,3,4,4,5,6,6,6
2	1,2,2,3,4,4,5,5,5,6
3	2,2,3,3,3,5,5,6,6,6
4	1,2,4,4,5,5,5,5,5,6
5	1,1,1,2,3,3,3,4,4,5
⋮	⋮
10	1,1,2,2,2,3,4,5,6,6

Em sala de aula, podemos realizar esse experimento com grupos de três pessoas, das quais uma delas fica responsável por jogar os dados, outra fica responsável por organizá-los em ordem crescente e a outra fica responsável por anotar os números.

Também conseguimos fazer um rodízio entre os alunos para que nenhum se canse por ficar sempre com a mesma função.

4. Instruções para a tabela cara e coroa honesto: Incluiremos uma coluna na tabela anterior, com o título de "Honesto/Caras". Tomemos $cara = \{1, 2, 3\}$ e $coroa = \{4, 5, 6\}$. A cada rodada, precisamos contar quantas vezes saiu cara e anotar nessa nova coluna (basta verificar quantas vezes saíram os números 1, 2 ou 3). No nosso exemplo, temos:

Tabela 5: Rodadas, exemplos de saídas de cada valor do dado e quantidade de ocorrência de caras no jogo honesto.

Rodadas	Saídas	Honesto/Caras
1	1,1,3,3,4,4,5,6,6,6	4
2	1,2,2,3,4,4,5,5,5,6	4
3	2,2,3,3,3,5,5,6,6,6	5
4	1,2,4,4,5,5,5,5,5,6	2
5	1,1,1,2,3,3,3,4,4,5	7
⋮	⋮	⋮
10	1,1,2,2,2,3,4,5,6,6	6

5. Instruções para a tabela cara e coroa desonesto: Vamos acrescentar mais uma coluna à nossa tabela, dessa vez, com o título "Desonesto/Caras". Consideremos $cara = \{1, 2\}$ e $coroa = \{3, 4, 5, 6\}$. Dessa forma, temos $\frac{1}{3}$ de probabilidade para cara e $\frac{2}{3}$ de probabilidade para coroa. Em cada rodada, vamos contar quantas vezes saiu cara e anotar nessa nova coluna. Assim:

Tabela 6: Rodadas, saídas de cada valor do dado, quantidade de ocorrência de caras no jogo honesto e no jogo desonesto.

Rodadas	Saídas	Honesto/Caras	Desonesto/Caras
1	1,1,3,3,4,4,5,6,6,6	4	2
2	1,2,2,3,4,4,5,5,5,6	4	3
3	2,2,3,3,3,5,5,6,6,6	5	2
4	1,2,4,4,5,5,5,5,5,6	2	2
5	1,1,1,2,3,3,3,4,4,5	7	4
⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,1,2,2,2,3,4,5,6,6	6	5

6. Instruções para o histograma para cara e coroa honesto: Vamos utilizar a coluna "Honesto/Caras" para contar e anotar quantas rodadas tiveram: 0 caras, 1 cara, 2 caras..., 10 caras. Anotemos esses 11 números e os chamaremos de $F_0, F_1, F_2, ..., F_{10}$. Dividiremos cada um desses números por N, que é o número

total de rodadas. Esses novos números devem estar entre 0 e 1, e os chamaremos de $f_0, f_1, f_2, ..., f_{10}$. Agora faremos um histograma, onde no eixo horizontal teremos as barrinhas de 0 a 10, e a altura m de cada barrinha será o número f_{m} calculado anteriormente. Para a construção do histograma desonesto, repita o processo utilizando os valores da coluna "Desonesto/Caras".

7. Análise do resultado: No caso do jogo honesto, é bastante intuitivo para nós que podemos esperar rodadas mais equilibradas, com "5 a 5", "6 a 4" e "4 a 6" na divisão entre caras e coroas. As rodadas menos equilibradas devem aparecer menos e, portanto, o histograma deve ser mais alto no meio e descendo até as extremidades. Já no jogo desonesto, o histograma ainda é simétrico? Qual é o número de caras mais provável em uma rodada de 10 lançamentos?

Teorização do Experimento

- Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Evento de interesse do dado honesto $Cara = \{1, 2, 3\}$ e $Coroa = \{4, 5, 6\}$.

1. Pela definição clássica, temos:

$$P(Cara) = \frac{\#\, Cara}{\#\, \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$P(Coroa) = \frac{\#\, Coroa}{\#\, \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Essa é a probabilidade real do lançamento do dado honesto.

2. Pela definição frequentista, temos:

$$P(Cara) = \frac{\textit{número de vezes em que Cara ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

$$P(Coroa) = \frac{\textit{número de vezes em que Coroa ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

- Evento de interesse do dado desonesto $Cara = \{1, 2\}$ e $Coroa = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Pela definição clássica, temos:

$$P(Cara) = \frac{\#\, Cara}{\#\, \Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$P(Coroa) = \frac{\#\, Coroa}{\#\, \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

   Essa é a probabilidade real do lançamento do dado desonesto que utilizamos, ou seja, tomando dois valores para a representação de Cara, e quatro para Coroa.

2. Pela definição frequentista, temos:

$$P(Cara) = \frac{\textit{número de vezes em que Cara ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

$$P(Coroa) = \frac{\textit{número de vezes em que Coroa ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

4.7.4 Dados não transitivos

Esses dados apresentam em suas faces opostas, números iguais. Por exemplo, o dado A contém os números 2, 4 e 9 em suas faces, em que o número 2 aparece em duas faces opostas, bem como os números 4 e 9.

1. Objetivo: Testarmos as propriedades dos dados não transitivos na prática.

2. Material: Três dados com três números em cada.

3. Instruções: Chamaremos os três dados de A (o que possui os números 2, 4 e 9), B (o que possui 1, 6 e 8) e C (com os números 3, 5 e 7). No lançamento de quaisquer dois deles, ganha o que sair com o número mais alto. Na prática, podemos observar que um tem probabilidade $\frac{5}{9}$, enquanto o outro tem probabilidade $\frac{4}{9}$ e dizemos que o que tem maior probabilidade ganha do outro. Nesse caso, A ganha de B, B ganha de C e C ganha de A.

   Façamos um grupo e joguemos várias rodadas utilizando esses três dados do seguinte modo: Deixemos um amigo escolher primeiro um dado e, a partir dele, escolhamos um dado melhor (precisaremos treinar para descobrir qual dado será melhor de forma rápida). Joguemos e anotemos os resultados. Fazendo isso muitas vezes, deveremos ganhar 5 de cada 9 jogadas, aproximadamente.

Teorização do Experimento

- Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Evento de interesse pode ser, por exemplo: $A = \{4\}$.

1. Pela definição clássica, temos:

$$P(A) = \frac{\#\, A}{\#\, \Omega} = \frac{1}{6}.$$

   Essa é a probabilidade real do lançamento do dado honesto, porém, a proposta desse experimento é viciar um dado honesto. Após a realização do experimento, podemos calcular:

2. Pela definição frequentista, temos:

$$P(A) = \frac{\textit{número de vezes em que } A \textit{ ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

4.7.5 A probabilidade por trás de um sorteio de Amigo Secreto.

1. Material: O dispositivo "amigo secreto".

2. Objetivo: Utilizando o dispositivo disponível no kit, testaremos as probabilidades envolvidas em um sorteio de amigo secreto. Um sorteio de amigo secreto é uma permutação de seus participantes.

3. Instruções para os sorteios: Façamos muitos sorteios utilizando o dispositivo e anotemos:

   (a) O número total de sorteios;

   (b) O número de sorteios que deram certo, ou seja, ninguém tira a si mesmo;

   (c) O número de sorteio onde ocorre um ciclo. Isto significa que, na entrega de presentes, o primeiro a dar o presente será o último a receber.

Teorização do Experimento

Um estudo feito por Euler, no século XVIII, trabalhou essa brincadeira, chamado "Permutações caóticas e a brincadeira do Amigo Secreto"[2]. Seja uma brincadeira de "amigo secreto", em que n pessoas estão participando. Elas escrevem seu nome em um pedaço de papel e colocam em um recipiente. Cada pessoa pega aleatoriamente um papel. Qual é a probabilidade de ninguém tirar seu próprio nome? Euler estudou essa situação e propôs a seguinte solução:

Podemos considerar um conjunto de n elementos, que seriam os participantes da brincadeira $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{\mathrm{n}}\}$. Nosso objetivo é permutar aleatoriamente o conjunto E, de modo que nenhum elemento volte à sua posição original. Dizemos que uma permutação do conjunto $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{\mathrm{n}}\}$ é *caótica* ou um *desarranjo* quando nenhum elemento está em seu lugar primitivo. Chamaremos de $D(n)$ o número total de permutações caóticas do conjunto E. Dessa forma, pela definição clássica de Probabilidade, temos:

$$P(n) = \frac{D(n)}{n!},$$

sendo $D(n)$ o nosso evento de interesse, e $n!$ é o total de possibilidades dessas permutações.

Logo, precisamos encontrar $D(n)$. Quando $n = 1$, ou seja, o conjunto E é unitário, não existem formas de desarranjar o elemento e_1, e assim $D(1) = 0$. Quando $n = 2$, os elementos e_1e_2 podem ser desaranjados de apenas uma forma: e_2e_1, e assim, $D(2) = 1$. Com $n = 3$, os desaranjos de $e_1e_2e_3$ são $e_3e_1e_2$ e $e_2e_3e_1$, e assim $D(3) = 2$. Prosseguindo com esse raciocínio, é possível verificar que $D(4) = 9$ e $D(5) = 44$. Porém, a partir daí, não é viável descrever as alternativas, sendo assim necessário deduzir a lei de formação de $D(n)$.

Vamos considerar $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{\mathrm{n}}\}$ como sendo o arranjo inicial dos n elementos. Para organizá-los de forma que nenhum retorne à sua casa original, existem $n - 1$ possibilidades para a primeira casa, já que nela, não pode estar e_1. Vamos supor então, que a primeira casa contenha e_2. Sendo e_2 o elemento da primeira casa, temos duas alternativas para a segunda casa:

- A segunda casa contém o elemento e_1

  Nesse caso, é necessário reorganizar os próximos $n - 2$ elementos $\{e_3, e_4, \ldots, e_{\mathrm{n}}\}$ para que nenhum deles volte à sua casa original. Esse é o mesmo problema do qual partimos, e assim, há $D(n - 2)$ formas de fazê-lo.

- A segunda casa não contém o elemento e_1

  Nesse caso, devemos rearranjar os $n - 1$ elementos restantes de modo que nenhum retorne à sua casa original. Assim, e_3 não será o terceiro elemento, e_4 nao será o

[2]Artigo disponível em <http://legal.icmc.usp.br/lib/exe/fetch.php?media=slides:amigo_secreto.pdf>.

quarto, e assim por diante, e além disso, como estamos tratando do caso em que e_1 não é o segundo elemento, ele fará o papel de e_2 nessa situação, ou seja, nao poderá estar na segunda casa. Como precisaremos rearranjar $n-1$ elementos, existem $D(n-1)$ formas de fazê-lo.

Essas duas alternativas pertencem a conjuntos que não apresentam configuração comum, e por isso, podemos observar que quando e_2 é o primeiro elemento, temos $D(n-1)+D(n-2)$ desarranjos possíveis. Além disso, há $n-1$ opções para a primeira casa, então:

$$D(n) = (n-1)\left[D(n-1) + D(n-2)\right].$$

Essa é uma fórmula de recorrência que resolve o problema, mas ainda não é uma função de n. Sendo assim, Euler observou que para todo $n \geq 3$, tem-se que:

$$\begin{gathered}
D(3) - 3D(2) = -[D(2) - 2D(1)] \\
D(4) - 4D(3) = -[D(3) - 3D(2)] \\
D(5) - 5D(4) = -[D(4) - 4D(3)] \\
\vdots \\
D(n) - nD(n-1) = -[D(n-1) - (n-1)D(n-2)].
\end{gathered}$$

Ao multiplicarmos, membro a membro as $(n-2)$ igualdades, temos:

$$[D(n) - nD(n-1)][D(n-1) - (n-1)D(n-2)]\ldots[D(4) - 4D(3)][D(3) - 3D(2)] =$$

$$(-1)^{n-2}[D(n-1) - (n-1)D(n-2)]\ldots[D(4)) - 4D(3)][D(3) - 3D(2)][D(2) - 2D(1)].$$

Podemos observar que com exceção do primeiro termo da esquerda e o último da direita, todos os elementos irão se cancelar. Assim, temos:

$$D(n) - nD(n-1) = (-1)^{n-2}[D(2) - 2D(1)].$$

E como

$$D(2) - 2D(1) = 1 - 2 \times 0 = 1$$

e

$$(-1)^{n-2} = (-1)^n,$$

temos que, para todo $n \geq 3$:

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n.$$

Apesar dessa igualdade ter sido obtida para $n \geq 3$, é possível verificar que ela é válida para $n \geq 2$, mas não para $n = 1$. Ainda procurando expressar $D(n)$ em função de n, Euler verificou que:

$$D(3) = 3D(2) - 1 = 3 - 1 = 3!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right),$$

$$D(4) = 4D(3) + 1 = 4\left[3!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\right] + 1 = 4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + 1 = 4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right),$$

$$D(5) = 5D(4) - 1 = 5\left[4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)\right] - 1 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) - 1 =$$

$$= 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right),$$

$$D(6) = 6D(5) + 1 = 6\left[5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)\right] + 1 = 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + 1 =$$

$$= 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right).$$

E assim sucessivamente. É possível mostrar pelo Princípio da Indução Finita que:

$$D(n) = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

De fato, para $n = 2$, temos:

$$D(2) = 2!\left[\frac{1}{2!}\right] = 1,$$

que é verdadeiro. Agora, suponhamos que seja válido para k, ou seja,

$$D(k) = k!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right].$$

Vamos mostrar que é válido para $k+1$. Já sabemos que,

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n.$$

Logo,

$$D(k+1) = (k+1)D(k) + (-1)^{k+1}$$

$$D(k+1) = (k+1)\left(k!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right]\right) + (-1)^{k+1}$$

$$D(k+1) = (k+1)!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right].$$

Isso demonstra a afirmação. Devemos nos lembrar de que $D(1) = 0$, então:

$$D(n) = n!\left[1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right], n \geq 1.$$

Assim, a probabilidade que procuramos, $\dfrac{D(n)}{n!}$ é:

$$P(n) = \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Algo curioso a se considerar é o fato de que essa Probabilidade praticamente se estabiliza a partir de valores relativamente baixos de n, por exemplo, $P(12) \simeq 0,36787944$ e $P(24) \simeq 0,3678794412$, que são valores muito próximos. Isso significa que desarranjar um conjunto com 12 ou com 12 milhões de elementos, por exemplo, a Probabilidade que nenhum volte à sua casa original é praticamente a mesma.

Agora, para o nosso caso, em que são 7 participantes no jogo do "Amigo Secreto" temos:

$$P(7) = \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right],$$

ou seja,

$$P(7) = \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040}\right],$$

então,

$$P(7) = \frac{103}{280},$$

isto é

$$P(7) \simeq 0,36785714.$$

Por fim, é importante ressaltar que para cada número real x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Assim,

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Em outras palavras, $P(n)$ se aproxima de $\frac{1}{e}$, quando n cresce indefinidamente.

4.7.6 O que há dentro dos chocalhos?

O kit trás entre seus materiais, três chocalhos nos quais existem bolinhas brancas e vermelhas. Os chocalhos possuem duas aberturas que permitem que o jogador observe bolinhas que estão contidas nele.

1. Material: Os três chocalhos.

2. Objetivos: Perceber que a Estatística e a Probabilidade servem para inferir a verdade, quando não temos acesso à ela. Nesse caso, o único jeito de descobrir quantas bolinhas de cada cor há dentro dos chocalhos, é anotando, já que não podemos abri-los.

3. Instruções para o experimento: Escolhemos primeiro um dos chocalhos, o sacudimos anotando os resultados das bolinhas que aparecem na janela. Repetiremos o processo muitas vezes, contando a proporção de vezes que apareceram duas bolinhas de uma cor, duas de outra cor e duas de cores diferentes.

Teorização do Experimento

Montemos uma tabela com as possibilidades (dentro do que é razoável que caiba dentro do chocalho) e suas probabilidades. Admitiremos primeiro o fato de que há apenas duas cores de bolinhas em cada chocalho. Se quiser ter certeza disto, experimente realizar os sorteios e veja que nunca aparecerá uma terceira cor. Chamaremos de P_{BB} a probabilidade de as duas bolinhas sorteadas serem brancas, e de P_{VV} de saírem vermelhas. Nessa tabela, na vertical estão indicadas as possibilidades para o número de bolinhas brancas e na horizontal as possibilidades para o número de bolinhas vermelhas, desse modo:

Tabela 7: Possibilidades de bolas brancas e vermelhas.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	x	x	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
1	x	(0,0)						
2	(1,0)							
3	(1,0)							
4	(1,0)							
5	(1,0)							
6	(1,0)							
7	(1,0)							

Agora, vamos preencher cada casa da tabela com o par (P_{BB}, P_{VV}) corresponde ao número n de bolas brancas (indicado no número da linha) e m bolas (indicado pelo número da coluna). Na tabela mostrada, excluímos os casos em que (n, m) é igual a (0, 0), (0, 1) e (1, 0) e marcamos com um x, já que não chegam a ter duas bolas no total. O caso $(n, m) = (1, 1)$ sempre mostrará uma bola de cada cor, portanto a probabilidade de saírem duas bolas da mesma cor é zero (por isso o par (0, 0) é colocado nessa casa). O caso $(n, m) = (n, 0)$ com $n \geq 2$ também é muito simples: com n bolas brancas e nenhuma vermelha, a probabilidade de saírem duas bolas brancas é 1 e a probabilidade de saírem duas vermelhas é zero; analogamente para o caso $(n, m) = (0, m)$ com $m \geq 2$.

Agora, peguemos um caso menos simples para exemplificar. Tomemos $n = 6$ e $m = 3$. As fórmulas são:

$$P_{\mathrm{BB}} = \frac{n}{n+m} \times \frac{n-1}{n+m-1} = \frac{6}{6+3} \times \frac{6-1}{6+3-1} = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}.$$

Analogamente,

$$P_{\mathrm{VV}} = \frac{m}{n+m} \times \frac{m-1}{n+m-1} = \frac{3}{6+3} \times \frac{3-1}{6+3-1} = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}.$$

Então, preencheremos a casa $(n, m) = (6, 3)$ com o par de probabilidades $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right)$. Atenção: Nesse caso, não é necessário que a somas das probabilidades resultem em 1, pois ainda há chance de saírem bolas de cores diferente. A probabilidade de saírem essas bolas de cores diferentes é $1 - P_{\text{BB}} - P_{\text{VV}}$. A sugestão é analisar experimentos dos alunos.

4.8 O experimento do Par ou Ímpar

Além dos experimentos estudados que estão disponíveis no Kit - As Certezas do Acaso, proponho também a utilização de um novo experimento: o jogo de "Par ou Ímpar".

1. Material: Para este experimento, não serão necessários materiais, visto que os alunos apenas utilizarão uma das mãos.
2. Objetivo: Calcular a Probabilidade em um jogo de Par ou Ímpar.
3. Instruções:

   As regras do jogo são:

   - Cada pessoa pode colocar apenas uma das mãos;
   - Os números representados pelos dedos devem ser de 1 a 5.

   O experimento deve ser realizado em duplas, e os alunos efetivamente jogarão "Par ou Ímpar". Cada dupla deverá jogar muitas vezes, por exemplo 50, e marcar com um "x"os resultados de todas as vezes em que o "Par" venceu, como na tabela-exemplo:

Tabela 8: Incidências de "Par"em 50 rodadas.

Rodadas	Vencedor: Par
1	x
2	
3	
4	x
5	x
⋮	⋮
50	x

Ao final das rodadas, os alunos deverão calcular a Probabilidade do "Par" vencer o jogo. É intuitivo pensarmos, a princípio, que essa Probabilidade é $\frac{1}{2}$. A proposta é discutir com os alunos acerca dessa intuição, e conferir com os resultados obtidos através da realização do experimento.

Teorização do Experimento

Para esse experimento, podemos construir uma tabela para a análise dos resultados:

Tabela 9: Possibilidades em um jogo de "Par ou Ímpar".

	1	2	3	4	5
1	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
2	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
3	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
4	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
5	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par

- Espaço Amostral $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),...,(5,5)\}$.
- Evento de interesse $Par = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),$ $(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$.
- Pela definição clássica, temos:

$$P(Par) = \frac{\#\ Par}{\#\ \Omega} = \frac{13}{25}.$$

- Pela definição frequentista, temos:

$$P(Par) = \frac{\textit{número de vezes em que "Par"ocorreu}}{\textit{número total de repetições do experimento}}.$$

E se dá pela realização do experimento em sala de aula.

É indispensável ressaltar que, nesse caso, a Probabilidade do "Par" vencer o jogo é $\frac{13}{25}$, já que não consideramos o zero como sendo uma possibilidade para os alunos representarem com a mão, e dessa forma, o jogo é desonesto. Caso as regras do jogo especifiquem que o zero seja uma possibilidade, e caso seja convencionado que o par $(0,0)$ indica um resultado "Par", o jogo passa a ser honesto, já que a Probabilidade de sair "Par" passa a ser $\frac{18}{36}$.

4.9 Relato dos experimentos aplicados

Com o intuito de primeiramente, testar três dos experimentos aqui listados na prática, e também com o propósito de discutir a orientação da BNCC acerca do ensino das noções de Estatística e Probabilidade para os anos iniciais do Ensino Fundamental, duas intervenções foram feitas na Companhia Educacional Enlace, uma escola de educação infantil e fundamental que desde 2009 apresenta um projeto pedagógico contemporâneo e que visa o desenvolvimento integral das crianças. Uma das intervenções, foi realizada em uma turma de quinto ano, e outra, em uma turma de sexto ano. As duas intervenções aconteceram no dia 06 de junho de 2018, das 10:00 às 10:50 na turma do sexto ano, e das 11:00 às 11:50 na turma do quinto ano. Dois colegas do curso de Licenciatura em Matemática da UFSJ me acompanharam nas intervenções, além do meu orientador.

4.9.1 Aplicação no quinto ano

Nessa turma, o experimento discutido foi o intitulado "Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto?". (ANEXO A)

Optei por fazer uma pequena adaptação nesse experimento, já que esses alunos teriam seu primeiro contato com o conceito de Probabilidade nesse momento e, sendo assim, resolvi que ao invés de utilizar a face 1 para a realização do experimento, utilizaríamos a face 5. O motivo dessa mudança foi o meu receio de que os alunos relacionassem o numerador da fração $\frac{1}{6}$ com o fato de utilizarmos a face 1, ou seja, quando eu perguntasse a eles, ao final, qual seria a probabilidade de sair a face 4, eles me respondessem $\frac{4}{6}$.

Desejei um bom dia aos alunos, me apresentei, apresentei meus colegas e disse a eles que eu faria com eles um jogo com dados. Pedi para que eles formassem duplas, e entreguei dez dados para cada uma, juntamente com uma caixinha que os auxiliaria durante as rodadas dos lançamentos. Antes de iniciar o experimento, perguntei a eles se eles poderiam me dizer se alguma face do dado tinha chance de sair mais do que outra. As opiniões eram bastante divididas, alguns alunos diziam que sim, outros diziam que não, e inclusive um aluno disse que tinha certeza de que as faces 1 e 6 saem menos. Eu disse a eles que, antes de realizarmos o experimento, conversaríamos um pouco sobre frações. Eu disse que para representar a chance de algum evento acontecer, expressávamos essa chance por uma fração na qual, no denominador, colocamos o número total de possibilidades de saída. E no numerador, a chance de algo específico acontecer. Como um exemplo simples, falei sobre moedas, explicando que as possibilidades de acontecer são a moeda sair com a face "Cara" ou a moeda sair com a face "Coroa". Desse modo, perguntei a eles qual número colocaríamos no denominador. Eles responderam: "Dois!" Concordei, e continuei, perguntando a eles que número colocaríamos no numerador, se eu quisesse a chance de sair a face "Coroa". Eles ficaram pensativos, expliquei que duas eram as possibilidades de sair em uma moeda, e perguntei quantas dessas possibilidades eram "Coroa". Eles responderam: "Um!".

A partir disso, eu disse a eles que construiríamos a fração para o dado. Fiz no quadro o traço da fração. Perguntei a eles quantas possibilidades o dado tem, todos responderam que eram seis. Perguntei onde colocaríamos o número seis, e eles responderam "Em baixo!". Nesse momento, a professora me pediu licença, me interrompeu e disse que eles já sabiam quais eram os nomes dos elementos de uma fração, e pediu para que eles respondessem corretamente. Então eles disseram que era no denominador. Eu concordei e perguntei a eles, se eu quisesse a chance de sair uma face do dado, por exemplo, a face 5, que número eu deveria colocar no numerador. Uma aluna respondeu que era um, mas o restante da turma não respondeu. Então eu disse a eles que naquele caso tínhamos seis possibilidades em um dado e perguntei se eu quisesse apenas uma das faces, qualquer uma delas, em quantas faces eu estaria interessada? Muitos responderam que era uma, eu anotei no quadro e perguntei se alguém não havia entendido, um aluno que sentava-se logo à frente disse que não havia compreendido a fração. Eu comecei novamente, dizendo a ele que para expressar a chance de algo acontecer, construiríamos uma fração onde o denominador representava o número total de possibilidades, e o numerador representava aquilo que eu estava interessada em calcular a chance. Então eu disse a ele que como o dado tem seis faces, o número de possibilidades de sair eram as seis faces. E como eu estava interessada em uma face, que no caso, eu havia escolhido a face 5, ela era uma das seis faces, e que se eu estivesse interessada em saber a chance de sair duas faces, como por exemplo, as faces 5 e 4, o numerador seria dois. Nesse momento ele concordou e disse que havia entendido. Perguntei se alguém queria que eu explicasse novamente sobre a fração, eles disseram que não.

Como eles mostraram ter compreendido a construção da fração, eu disse que começaríamos o experimento, e ele nos permitiria descobrir se realmente essa chance de sair uma face é de um para seis, ou será que algum número tem mais chances do que outro de sair? Realizando um experimento, conseguiríamos, com valores aproximados, descobrir essa resposta. Assim, comecei a explicá-los como o experimento seria realizado. Pedi para que cada dupla lançasse, de uma vez, os dez dados, e percebessem quantas faces 5 saíram. Nesse momento, eu esclareci novamente que escolhi a face 5, mas poderia ser qualquer uma das seis faces do dado. Eles deveriam repetir o experimento por 15 vezes, cada dupla. Pedi também que eles anotassem esses resultados, da seguinte forma:

Tabela 10: Rodadas e Faces 5.

Rodada	Faces 5
1 - 10	
11 - 20	
21 - 30	
31 - 40	
41 - 50	
51 - 60	
61 - 70	
⋮	⋮
141 - 150	

Expliquei também que, meus ajudantes iriam auxiliá-los com os lançamentos, a contagem e as anotações, caso fosse necessário. E que ao final dos lançamentos, eles deveriam somar todas as vezes em que a face 5 ocorreu, em todas as rodadas. Meus colegas os auxiliaram na contagem de faces 5 e também nessa soma, já que ela teria 15 parcelas.

Durante as rodadas de lançamentos e de contagem, tudo correu bem, e como planejado. Meus colegas os observavam e ajudavam. As duplas não tiveram dificuldade com relação à essas orientações e se divertiram balançando as caixas com os dados. Esse processo levou cerca de 20 minutos. Quando terminaram, eu disse a eles que agora faríamos, juntos, os cálculos para verificar.

Eu disse a eles que conseguiríamos verificar se todas as faces tem a mesma chance de sair, fazendo muitos lançamentos de um dado, e anotando, assim como fizemos. Como aquela turma tinha 14 alunos, haviam 7 duplas e cada uma delas realizou 15 lançamentos, porém, a cada lançamentos, tinham 10 dados. Perguntei a eles como poderíamos descobrir o total de dados que cada dupla lançou. Uma aluna respondeu que bastava multiplicar 15 por 10. Concordei, e pedi para que eles realizássem essa multiplicação. Sem dificuldades e sem precisar anotar no caderno, eles responderam que era 150, e assim, concluímos que cada dupla realizou 150 lançamentos. Mas, esse número foi o que cada dupla lançou, e lembrei-os de que havia 7 duplas na sala. Sendo assim, quantos lançamentos a turma toda realizou? Um aluno disse que bastava multiplicar 150 por 7. Novamente, pedi que realizassem a operação. Também sem dificuldades, eles encontraram 1050, que é o número total de lançamentos.

Antes de prosseguir com a construção da fração, conversamos um pouco sobre a ideia de fração equivalente. Como eles ainda não haviam aprendido, eu dei alguns exemplos simples, utilizando a fração $\frac{1}{2}$, que havíamos utilizado para o exemplo com moedas, e pedi para que eles multiplicassem o numerador e o denominador por 2, e depois por 3, e por 4. Sem muitas dificuldades, eles me falavam as novas frações. Depois, usei como exemplo a fração $\frac{1}{6}$, e multiplicando por 2 por 3 e por 4, também construímos as novas frações. Nesse momento, a professora Carolina me interrompeu novamente, dizendo que quando existe uma barrinha, dividida em seis partes e colorimos uma, ela é igual se dividirmos a mesma barrinha em 12 partes e colorirmos duas, que é igual a dividir a mesma barrinha em 24 partes e colorirmos 4, e assim sucessivamente até dividirmos a mesma barrinha em 1050 partes, e colorirmos 175. Quando ela terminou, perguntou a eles se haviam entendido, eles disseram que sim.

Eu disse que as frações equivalente à $\frac{1}{6}$, como $\frac{2}{12}$ e $\frac{3}{18}$, também podem ser obtidas se soubermos apenas o denominador. Ao dividirmos cada um desses denominadores pelo denominador 6 e multiplicarmos pelo numerador 1, encontraríamos o numerador da fração equivalente a $\frac{1}{6}$. Fiz no quadro para $\frac{2}{12}$ e $\frac{3}{18}$. Perguntei como faríamos para encontrarmos o numerador da fração equivalente a $\frac{1}{6}$ com denominador 24, e eles disseram que bastava dividir 24 por 6 e multiplicar por 1, do mesmo modo que fizemos com as duas primeiras. Concordei e disse que descobriríamos então, o numerador dessa fração, e perguntei quanto era 24 dividido por 6, e eles já responderam que o numerador era 4, já que 4 multiplicado por 1 é 4.

Perguntei a eles qual seria o nosso denominador para esse experimento, lembrando era o número total, porém, nesse caso, seria o total de lançamentos de toda a turma. Eles responderam que era 1050. Com a ideia de frações equivalentes que acabávamos de discutir, descobrimos o numerador esperado para essa fração, dividindo 1050 por 6. Eles calcularam. Conversamos sobre isso, e eu disse a eles que a fração $\frac{175}{1050}$ representava a quantidade de ocorrências de uma face que esperamos. Nesse caso, como foram 1050 lançamentos, espera-se que 175 tenham sido de faces 5.

Então pedi para que as duplas me dissessem o total de vezes em que a face 5 saiu nos seus lançamentos. Anotei no quadro para que somássemos todos os valores, e disse que faríamos uma fração, assim como a que fizemos anteriormente, porém, com o denominador sendo todos os lançamentos realizados, e o numerador sendo a quantidade de faces 5 que apareceram em toda a turma, e encontramos 172. Desse modo, eles conseguiram se convencer de que a chance de sair a face 5 em muitos lançamentos de um dado se aproxima de $\frac{175}{1050}$, que é uma fração equivalente a $\frac{1}{6}$, e nós encontramos um valor bastante próximo de 175.

Eu disse a eles que, poderíamos fazer esse experimento para qualquer face, que encontraríamos sempre valores aproximados e um aluno chamado João que, ao início da aula disse que os números 1 e 6 saem menos vezes do que os outros, disse nesse momento, que ele não acredita que o número 6 saia tantas vezes. Então eu propus para eles que repetissem o experimento, porém, com a face 6. Não precisei repetir as orientações para os experimentos. Eles, sozinhos já construíram a nova tabela, fizeram os lançamentos e somaram as ocorrências ao final.

Nesse experimento, encontramos 190 ocorrências de faces 6, e alguns alunos disseram que esse valor não era muito próximo de 175. Conversamos um pouco sobre isso, alguns alunos relacionaram essa diferença com distâncias, com isso alguns alunos disseram que consideravam 190 e 175 números próximos, e outros não pensavam assim.

Uma aluna propôs que fizéssemos com a face 1, porém, faltavam cinco minutos para o término da aula, e eu disse que não daria tempo. Mas que eles poderiam testar em casa para todas as faces se quisessem, desde que fosse um número muito grande de lançamentos como o que havíamos feito, por exemplo 1050 lançamentos.

Assim, perguntei aos alunos se eles haviam gostado da aula, eles disseram que sim, e eu perguntei se eles acharam aquele experimento legal e uma aluna me respondeu: "Você é muito legal, mas isso aqui... Matemática... não é não, viu?". Os outros alunos disseram que gostaram bastante, e perguntaram se iríamos voltar para fazer mais jogos com dados. Eu os respondi que talvez eu voltaria, se a professora quisesse, para trabalharmos algum outro assunto utilizando jogos. Me despedi da professora e a agradeci, e ela disse-me que eles gostaram bastante, e que eu poderia voltar sempre que precisasse para trabalhar com seus alunos. Me despedi dos alunos.

4.9.2 Aplicação no sexto ano

O experimento escolhido para ser aplicado nessa turma foi o "Probabilidades numa rodada de 10 jogadas de cara e coroa, honesto e desonesto"e também o "Experimento do Par ou Ímpar". (ANEXO B)

Iniciei a aula me apresentando aos alunos, apresentando meus colegas e dizendo que eu estaria trabalhando com eles um conceito que até então, eles ainda não haviam estudado. É importante ressaltar que o professor dessa turma apenas havia mencionado alguns conceitos de Probabilidade anteriormente, sem os definir ou discutir. Quando eu perguntei a eles se já tinham ouvido falar sobre a chance de algo acontecer, eles respondiam-me alguma expressões soltas, como "Probabilidade!", "Uma chance de 50%!", "Qual é a chance de eu tirar 10 na prova?". Eu os ouvi, e disse que a ideia era justamente essa, nós trabalharíamos com a chance de algo acontecer. Pedi para que os alunos formassem duplas, e com a ajuda de meus colegas, distribuí 10 dados para cada dupla e a caixinha para suporte dos dados.

Conversei com eles sobre chances, e sobre a construção da fração da Probabilidade. Disse que sempre que vamos calcular uma Probabilidade, primeiro precisamos analisar todas as possibilidades possíveis naquela situação, ou seja, tudo que poderia acontecer. E disse que também precisaríamos definir qual é o nosso interesse, ou seja, o fato que nos interessa, e assim, colocaríamos em uma fração, onde o denominador é a quantidade de opções possíveis de se acontecer, e o numerador representa a quantidade de possibilidades daquilo que estamos interessados em calcular a chance. Comecei construindo a fração da Probabilidade em um jogo de "Cara ou Coroa" com moedas. Perguntei a eles quantas possibilidades existem no lançamento de uma moeda, quais são as opções para uma moeda apresentar? Eles responderam que eram duas, cara e coroa. Anotei isso no quadro. Diante disso, perguntei a eles quantas seriam as possibilidades, caso o meu evento de interesse fosse uma moeda que apresentasse "Cara". Eles responderam que era uma. Concordei. Perguntei qual número colocaríamos no denominador. Eles responderam: "Dois!" Perguntei qual número colocaríamos no numerador, e eles responderam: "Um!".

Nesse momento, apesar de não ter planejado, resolvi, não começar diretamente com o experimento do "Cara ou Coroa honesto e desonesto". Optei por iniciar fazendo o experimento que eu aplicaria no quinto ano, sobre a chance de sair uma face de um dado, e então construí com os alunos, a fração da Probabilidade de sair a face 1 em um dado. Perguntei qual seria o denominador da fração, ou seja, quantas eram as possibilidades de sair em um dado. Eles reponderam que eram seis, e então eu perguntei que número colocaríamos no denominador, se estivéssemos interessados em saber a chance de sair apenas uma das faces, por exemplo, a face 5. Muitos responderam "Um!" Porém, um aluno respondeu "Três". Eu perguntei a eles o motivo de ele ter dito que era três, e ele disse que seguindo a fração que fizemos para moedas, como essa nova fração possui denominador seis, o numerador deveria ser dois. Eu disse a ele que entendi o seu pensamento, porém, essa era uma nova situação, diferente da anterior. E expliquei que se um dado tem seis faces, e queremos saber a chance de apenas uma delas sair, ela representa uma das seis faces. Ele concordou comigo, e então eu prossegui.

Eu disse a eles que faríamos um experimento para verificar se a chance de sair uma face em um dado era realmente um para seis. E para isso, lançaríamos muitas vezes os dados, e verificaríamos se a fração encontrada nesses muitos lançamentos era equivalente à fração $\frac{1}{6}$. Expliquei que cada dupla tinha dez dados e uma caixinha. Eles deveriam lançar de uma vez os dez dados, e anotar quantas vezes ocorreu a face 5, em cada rodada. Faríamos dez rodadas. Desenhei no quadro a tabela para que eles fizessem as anotações:

Tabela 11: Rodadas e Faces 5.

Rodada	Faces 5
1 - 10	
11 - 20	
21 - 30	
31 - 40	
41 - 50	
51 - 60	
61 - 70	
⋮	⋮
91 - 100	

Disse que meus colegas e eu os auxiliaríam no que fosse necessário. Rapidamente os alunos realizaram os lançamentos. Quando terminaram, eu disse que construiríamos a fração como fizemos anteriormente. Para isso, precisávamos descobrir qual foi o total de dados lançados. Cada dupla havia jogado dez rodadas de dez dados. Rapidamente eles me disseram que cada dupla jogou 100 vezes. Como nessa turma haviam oito duplas, perguntei qual era o total da turma. Eles disseram que eram 800. Eu concordei e disse que, se essa fração deveria ser equivalente a $\frac{1}{6}$, e nós sabíamos que o denominador era 800, perguntei qual seria o numerador. Falando de frações equivalentes, mostrei que se multiplicássemos o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{6}$ por 2, encontraríamos $\frac{2}{12}$. Perguntei que fração encontraríamos de multiplicássemos o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{6}$ por três. Rapidamente eles responderam que era $\frac{3}{18}$. Então eu escrevi no quadro: $\frac{\quad}{24}$ e disse que essa era uma fração equivalente à $\frac{1}{6}$, assim como $\frac{2}{12}$ e $\frac{3}{18}$, e se dividíssemos cada um desses denominadores por seis, encontraríamos o numerador. Fiz no quadro para as duas frações. Expliquei que para encontrarmos o numerador da fração com denominador 24, bastava dividir 24 por 6, assim como fizemos com as outras. Antes que eu terminasse a minha fala, os alunos disseram que era 4. Concordei com eles, perguntei se alguém gostaria que eu repetisse essa explicação, e não obtive resposta.

Sendo assim, como sabíamos que 800 dados foram lançados ao total, conhecíamos o denominador da fração. Eu perguntei a eles, como essa era uma fração equivalente à $\frac{1}{6}$, como eu descobriria o numerador. Muitos responderam que bastava dividir por seis. Eu concordei e pedi para que eles fizessem essa divisão. Em pouco tempo alguns alunos disseram que a resposta era 133, e que havia sobrado resto. Eu disse que não havia problema em sobrar resto, já que a chance de algo acontecer está sempre expressa em aproximações.

Então eu disse que, esperávamos que o numerador dessa fração fosse 133, e anotei no quadro $\frac{133}{800}$. Pedi então para que os alunos somassem o total de ocorrências da face 5 em todas as rodadas. Eles somaram, e eu anotava no quadro o total de cada dupla, para que somássemos tudo ao final. Quando somamos o total de faces 5 de toda a turma, encontramos 131. Desse modo, eu disse que como encontramos um número bastante próximo de 133, podíamos entender que realmente a chance de sair uma face qualquer (nesse caso, a face 5) em muitos lançamentos era de 1 para 6.

Nesse momento, disse aos alunos que trabalharíamos ainda com dados, porém, com a ideia do jogo de "Cara ou Coroa". A ideia do jogo seria a mesma porém, utilizaríamos dados ao invés de moedas, e que iríamos considerar, no dado, os números 1, 2 e 3 como sendo "Cara" e 4, 5 e 6 como sendo "Coroa". Eu disse então que faríamos o experimento calculando a Probabilidade de sair "Cara", ou seja, de sair os números 1, 2 e 3 do dado. Nesse momento, construí com eles a fração dessa Probabilidade, colocando o número 6 no denominador, e perguntando a eles qual a quantidade dessas seis faces que representavam o nosso interesse, que era "Caras". Eles responderam: "Três!" Parabenizei-os.

Perguntei se haviam entendido, eles disseram que sim. Eu pedi então, para que cada dupla realizasse 10 lançamentos, com os dez dados de uma vez, como já havíamos feito separasse os dados que tiraram 1, 2 e 3 dos que tiraram 4, 5 e 6 e anotasse, em uma tabela, dessa forma:

Tabela 12: Rodadas e quantidade de ocorrência de caras.

Rodadas	Caras
1	
2	
3	
4	
5	
⋮	⋮
91 - 100	

Eu disse também que meus colegas os auxiliariam, caso fosse necessário. Esse experimento demorou um pouco mais para ser realizado. Quando terminaram de anotar, eu disse que então, iríamos testar se a Probabilidade de tirarmos "Cara" era realmente $\frac{1}{2}$.

Falei que somaríamos a quantidade de dados lançados de todas as duplas, e pedi para que me lembrassem. Eles responderam que eram 800. Agora, somaríamos a quantidade de dados 1, 2 e 3 de todos. Anotei no quadro, e disse que constuiriamos a fração, assim como já havíamos feito. Com a ajuda deles, a partir da fração $\frac{1}{2}$, escrevemos a fração equivalente, de numerador 800. A fração $\frac{400}{800}$ era a esperada para esse experimento, e a fração que encontramos foi $\frac{385}{800}$.

Conversamos um pouco sobre esse experimento, e eu os alunos se convenceram de que 385 é um número próximo de 400, em 800 lançamentos. A partir disso, eu disse que faríamos novamente o experimento, porém, iríamos dessa vez considerar "Cara" como sendo apenas 1 e 2, e "Coroa" como sendo 1, 2, 3 e 4. Calcularíamos novamente a Probabilidade para "Cara". Antes de iniciar o experimento, como vínhamos fazendo, pedi a ajuda deles para construir a fração para este caso. Perguntei qual era o denominador, ou seja, o total de possibilidades de sair no dado. Sem pensar eles já me responderam que eram seis. Concordei e perguntei qual era, nesse caso, o número que representava as possibilidades de sair "Cara". Eles disseram que era dois. Concordei, e anotei no quadro: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Eles fizeram o experimento. A fração que esperávamos para este caso era $\frac{266}{800}$, que construímos juntos. A que encontramos foi $\frac{282}{800}$. Conversamos um pouco sobre esse experimento. Perguntei a eles porque ocorreu essa diferença de quando consideramos "Cara" como sendo 1, 2 e 3, de quando consideramos "Cara" como sendo apenas 1 e 2. Muitos falavam ao mesmo tempo. Uma aluna disse que a culpa foi minha, pois eu troquei a regra e portanto, alterei os resultados. Um aluno disse que foi pelo fato de considerarmos quantidades diferentes para "Cara". Concordei com ele.

Por fim, perguntei o que eles pensavam sobre o jogo de "Par ou Ímpar". Se eles sabíam me dizer se chance do "Par" ou do "Ímpar" ganhar era a mesma. Alguns disseram que o "Par" sempre ganha, outros disseram que o "Ímpar" sempre ganha, mas a maioria disse que a chance é a mesma.

Então eu disse que mostraria a eles a verdade por trás desse jogo. Expliquei que cada pessoa tem cinco possibilidades de números para colocar, ou seja, de 1 a 5. É importante observar que eu não citei o fato de que o zero seria uma possibilidade, tratando assim, apenas do "Par ou Ímpar" desonesto. Desenhei o seguinte quadro, em que a primeira coluna representava as possibilidades de um jogados representar com uma das mãos, e na primeira linha, as possibilidades do outro jogador e, junto com eles, fomos completando os espaços com as palavras "Par" ou "Ímpar" .

Tabela 13: Possibilidades em um jogo de "Par ou Ímpar".

	1	2	3	4	5
1	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
2	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
3	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
4	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
5	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par

Ao final contabilizamos o total de possibilidades, o total de pares e o total de ímpares, fazendo as frações. Dessa forma, mostrei a eles que escolher "Par" tem uma vantagem, pequena, mas que era uma vantagem. Nesse momento, um aluno que havia participado ativamente das atividades e se mostrou bastante curioso disse-me que no jogo que ele conhece, pode-se usar as duas mãos. Então eu propus que eles fizéssem o quadro, porém agora, com dez possibilidades para cada jogador. Esse aluno e mais um, que não estava na mesma dupla que ele, imediatamente construíram o quadro e começaram a contabilizar. Eles descobriram que, no caso onde colocam-se as duas mãos no jogo, o "Par" e o "Ímpar" têm a mesma chance. Eu não os ajudei a construir o quadro e nem a construir as frações. Eles, sozinhos descobriram o resultado, e compartilharam com toda a turma.

Já estava na hora de eu sair para o professor da próxima aula chegar, então me despedi deles. O professor Wanderson pediu para que eles me agradecessem, e então todos bateram palmas. Agradeci, e me despedi.

4.9.3 Comentários e reflexões

Durante as aplicações, pude notar que a turma do quinto ano se divertiu bastante com o experimento. A única dificuldade encontrada foi com relação ao conteúdo de frações equivalentes, que eles ainda não haviam estudado mas apesar disso, eles participaram e compreenderam a ideia central do experimento aplicado. Meu objetivo era discutir com eles sobre as chances de sair uma face em muitos lançamentos de um dado. Creio que esse experimento se adaptou bem à série. Quando, no início desta aula, um aluno diz que as faces 1 e 6 ocorrem uma quantidade de vezes menor do que as demais, percebi ali uma oportunidade de trabalhar com eles essa intuição. Diante disso, como foi planejado repetir o experimento para uma face sugerida por eles, optei por utilizar a face 6. Ouvir a opinião dos alunos é muito importante nesse tipo de trabalho, e ouví-los dizer que gostariam que eu voltasse para brincarmos de novo com dados me fez perceber que essa não foi uma aula em que eu os confundi, trazendo essa nova ideia. E esse era um dos meus receios, já que nunca havia trabalhado com crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental. Sob meu ponto de vista, a orientação da BNCC acerca de introduzir noções de Estatística e Probabilidade nos anos iniciais é totalmente válida. É importante que os alunos, desde essa fase, comecem a interagir com temáticas que estudarão novamente, em outra fase.

O estudo de Estatística e Probabilidade auxilia na construção de cidadãos críticos e do raciocínio.

Com o sexto ano, apesar da faixa etária não diferenciar muito, na maturidade, essa diferença é bastante notável. Com eles, eu não havia planejado tratar da Probabilidade de uma face de um dado, porém, quando cheguei na sala de aula, pensei que seria melhor fazer com eles esse experimento antes de ir para o "Cara ou Coroa" com dados, mesmo que ao final não sobrasse tempo para discutirmos o "Par ou Ímpar". Essa atitude gerou resultados positivos, já que assim, fomos aumentando gradativamente os detalhes dos experimentos. Os alunos se envolveram bastante, e eram bastante ágeis. Eles ficaram animados e ansiosos quando estávamos calculando a frequência de toda a turma. No fim dessa aula, quando dois alunos ficaram curiosos sobre a Probabilidade do "Par ou "Ímpar" com dez dedos, e construíram sozinhos a tabela para verificar esse resultado, senti que despertei neles alguma curiosidade. O professor Wanderson disse-me que aquela aula foi ideal naquele momento, já que eles estavam trabalhando com frações e equivalências.

É importante ressaltar que nessa escola, as turmas possuem uma média de 16 alunos, o que facilita muito o trabalho com jogos. Além disso, a motivação dos alunos pode ser atribuída à ludicidade das atividades, já que promovem a autoconfiança e favorecem o processo de aprendizagem.

5 Conclusões

A Educação Estatística está diretamente ligada à prática, já que os estudos acerca da Estatística são utilizados para prever e discutir fenômenos e/ou acontecimentos. Sobre o Ensino de Probabilidade, penso que muitos professores não se esforçam para criar metodologias de ensino para este conteúdo já que eles mesmos, muitas vezes não compreendem ou assimilam que ao utilizar a prática, o aprendizado dos alunos constrói-se de maneira natural.

Minha opção sobre trabalhar com o ensino de Probabilidade me ocorreu depois de um fato que presenciei enquanto cumpria o Estágio Supervisionado. Uma professora do segundo ano do Ensino Médio disse-me que estava considerando a possibilidade de não passar aos seus alunos o conteúdo de Probabilidade, pois achava muito difícil, e ela não o dominava bem. Acredito que algumas metodologias, como as que apresento aqui possam auxiliar e contribuir com a prática docente acerca do ensino de Probabilidade.

A inserção dos jogos para o ensino de Matemática no contexto escolar permite que o aluno construa o seu conhecimento enquanto trabalha outras vantagens dessa metodologia, como por exemplo, trabalho em equipe.

Neste trabalho apresento sugestões para o ensino de Probabilidade que podem ser utilizadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. É importante que os alunos consigam realmente compreender aquilo que lhes é apresentado na escola, e acredito que os jogos contribuam para essa percepção sobre Probabilidade. Além do estudo detalhado de seis experimentos que foram criados com este propósito, a sugestão de um novo experimento tratada neste trabalho pode motivar outros professores e futuros professores não só à exploração de todos os recursos disponíveis para qualquer conteúdo, mas também a criação de algum que atenda a sua turma naquele momento.

Durante as duas aplicações que realizei na Companhia Educacional Enlace, pude notar as potencialidades de uma atividade lúdica em sala de aula, já que os alunos se mostraram bastante participativos, conceberam os conceitos que visei ensiná-los e além disso, divertiram-se. O professor do sexto ano disse-me que nessa turma, há um aluno que sai da sala de aula três vezes durante a aula de Matemática, para que ele espaireça e volte mais concentrado. No dia em que apliquei o experimento, ele não pediu para sair nenhuma vez e, segundo Wanderson, ele provavelmente se envolveu bastante na atividade.

Além da proposta de jogos para o ensino de Probabilidade, ressalto a *Modelagem Matemática* e a *Resolução de Problemas* como formas de trabalho que se mostram-se eficazes pelo fato de tratarem da realidade dos alunos, de seus interesses e metas, o que vincula muito bem os tópicos do ensino de Estatística.

6 Referências Bibliográficas

[1] BATANERO, C. **Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo.** In: FLORES, P.; LUPIÁÑEZ, J. (Ed.). Investigación en el aula de matemática. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales, 2006. CD ROM.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio> Acesso em: 18/05/2018.

[3] BRASIL. Mistério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio.** Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 03/10/2017.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília,DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 03/10/2017.

[5] COLLI, E. **As Certezas do Acaso. Material didático ou instrucional - Kit educativo sobre probabilidades.** Coleção: Aventuras na Ciência. Instituto de Matemática e Estatística - USP. São Paulo, 2013.

[6] CUNHA, A. M. O.; CICILLINI, G. A. **Considerações sobre o ensino de ciências para a escola fundamental.** In: VEIGA, I. P. A.; CARDOSO, M. H. F. Escola fundamental: currículo e ensino. 2a ed. Campinas: Papirus, 1995.

[7] LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1998.

[8] LOPES, C. A. E. **Os desafios para Educação Estatística no currículo de Matemática.** In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. Estudos e reflexões em Educação Estatística. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

[9] MORGADO, A. C., CARVALHO, J. B. P., CARVALHO, P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9a edição. Rio de Janeiro. SBM, 1991.

[10] **Permutações caóticas e a brincadeira do Amigo Secreto.** Disponível em: <http://legal.icmc.usp.br/lib/exe/fetch.php?media=slides:amigo_secreto.pdf>. Acesso em: 02/05/2018.

[11] **Projeto Aventuras na Ciência.** Disponível em: <http//www.aventurasnaciencia.ib.usp.br>. Acesso em: 02/10/2017.

[12] ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** Porto Alegre Artmed, 1998.

7 Anexos

7.1 ANEXO A - Plano de aula para o quinto ano

Escola: Companhia Educacional Enlace
Série: 5º ano
Data: 06/06/2018
Duração: 50min
Hora: 11:00

Professor responsável: Carolina Reis e Silva Farnese Ferreira
Tema da aula: Probabilidade
Objetivos: Introdução da noção de Probabilidade utilizando dados
Materiais necessários: 10 dados para casa dupla e caixinha para auxiliar nos lançamentos.
Desenvolvimento:

O experimento que será aplicado nessa turma é o intitulado "Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto?". Algo que é importante observar, é que para o primeiro momento da aula, optei por trocar a face 1 pela face 5, para que quando construirmos a fração da Probabilidade de sair qualquer face de um dado honesto, os alunos não confundam o numerador da fração com a face que foi escolhida para realizar o experimento. Diante deste receio, optei por escolher qualquer outra face do dado.

Em um primeiro momento, pedirei que os alunos formem duplas, e entregarei 10 dados para cada dupla, e uma caixinha para facilitar os lançamentos.

Antes de dar inicio ao experimento, conversaremos um pouco sobre a perspectiva dos alunos com relação às chances de sair uma face de um dado. Tentarei compreender o que é intuitivo para eles. Direi que para representar essas chances, utilizamos frações, onde o denominador representa o número total de possibilidades, e o numerador representa apenas aquilo que estamos interessados, por exemplo: Uma moeda possui as faces Cara e Coroa. Quando eu jogo, qual é a chance de sair Coroa? Construirei a fração com a ajuda dos alunos. A partir disso, construiremos a fração para a chance de sair uma face de um dado. Explicarei que, o experimento nos permitirá verificar se a chance de sair um número qualquer em um dado é realmente $\frac{1}{6}$.

Nesse momento, daremos início ao experimento. Pedirei que cada dupla realize 15 lançamentos, com os 10 dados, todos de uma vez, e que anotem em quantos deles saíram a face 5. É importante ressaltar que poderia ser qualquer uma das faces. Como sugestão para as anotações, utilizar a tabela:

Rodada	Faces 5
1 - 10	
11 - 20	
21 - 30	
31 - 40	
41 - 50	
51 - 60	
61 - 70	
$\vdots$	$\vdots$
141 - 150	

Somar todos os lançamentos das duplas e todas as incidências de faces 5. Com a ajuda dos alunos, montar a fração. Como essa turma possui 14 alunos, a expectativa é de que a fração seja $\frac{175}{1050}$. Realizar novamente o experimento, dessa vez com outra face do dado, que deixarei para que os alunos escolham, porém, deve ser a mesma face para toda a turma.

Ao fim, conversaremos sobre frações equivalentes para que eles possam comparar as frações encontradas.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2016. Disponível em: <http:// basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio> Acesso em: 18/05/2018.

[2] COLLI, E. **As Certezas do Acaso.** Material didático ou instrucional - Kit educativo sobre probabilidades. Coleção: Aventuras na Ciência. Instituto de Matemática e Estatística - USP. São Paulo, 2013.

7.2 ANEXO B - Plano de aula para o sexto ano

Escola: Companhia Educacional Enlace
Série: 6º ano
Data: 06/06/2018
Duração: 50min
Hora: 10:00

Professor responsável: Wanderson Willer Texeira
Tema da aula: Probabilidade
Objetivos:

- Introdução da noção de Probabilidade utilizando dados para o jogo de "Cara ou Coroa" honesto e desonesto;
- A Probabilidade por trás de um jogo de "Par ou Ímpar".

Materiais necessários: 10 dados para casa dupla e caixinha para auxiliar nos lançamentos.

Desenvolvimento:

O experimento que levarei para essa turma é "Probabilidades numa rodada de 10 jogadas de cara e coroa, honesto e desonesto".

Em um primeiro momento, conversarei com os alunos sobre o jogo de "Cara ou Coroa" com moedas. Conversaremos sobre chances, espaço amostral e eventos, sem necessariamente utilizar esses termos, mas no intuito de que eles compreendam como construir a fração da Probabilidade. Depois disso, colocarei a ideia do "Cara ou Coroa" com dados, explicando que faremos os números 1, 2 e 3 representar "Cara" e os números 4, 5 e 6 representar "Coroa" e direi que o experimento nos permitirá observar se as chances de sair "Cara" é realmente $\frac{1}{2}$.

Pedirei para que formem duplas, e entregarei 10 dados para cada dupla e a caixinha para a realização do experimento. Cada dupla deverá realizar 10 lançamentos, com os 10 dados de uma vez, e anotar as saídas dos números 1, 2 e 3, que para nós, representarão a face "Cara" da moeda, usando a tabela:

Rodadas	Caras
1 - 10	
11 - 20	
21 - 30	
31 - 40	
41 - 50	
⋮	⋮
91 - 100	

Quando terminarem, construiremos a fração que representa a Probabilidade com o total de lançamentos de toda a turma. A partir da ideia de frações equivalentes, conversar sobre a fração que representa a expectativa, e comparar com a fração que encontramos dos lançamentos de toda a turma.

Em um segundo momento, realizaremos o experimento novamente, porém, utilizando as faces 1 e 2 para "Cara" e as faces 3, 4, 5 e 6 para "Coroa" e anotaremos novamente observando as saídas de "Cara", ou seja, as faces 1 e 2. Ao fim, construir a fração, com os lançamentos de toda a turma. Comparar os resultados e discutir.

Um último momento da aula será para a discussão acerca do jogo "Par ou Ímpar" que obedeçam às seguintes regras:

- Cada jogados pode utilizar apenas uma das mãos;
- Os números representados pelos dedos devem ser de 1 a 5.

Perguntarei aos alunos o que eles pensam sobre a chance de se vencer no "Par ou Ímpar". A chance é a mesma para ambos? Após essa rápida conversa, mostrar que, quando o jogo obedece às duas regras que foram colocadas, o "Par" possui uma vantagem sobre o "Ímpar". Com a ajuda dos alunos, construir a tabela:

	1	2	3	4	5
1	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
2	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
3	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
4	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar
5	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par

Contar o número total de possibilidades, e número total de "Par" e de "Ímpar" e construir as frações.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília,DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 03/10/2017.

[2] COLLI, E. **As Certezas do Acaso.** Material didático ou instrucional - Kit educativo sobre probabilidades. Coleção: Aventuras na Ciência. Instituto de Matemática e Estatística - USP. São Paulo, 2013.